



TITLE:

$H_{2n+1}(B\Gamma_n, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$  なる全射が存在するという  
Thurstonの定理について (Foliationsと  
 $C^\infty$ -写像)

AUTHOR(S):

水谷, 忠良

---

CITATION:

水谷, 忠良.  $H_{2n+1}(B\Gamma_n, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$  なる全射が存在するという Thurstonの定理について (Foliationsと  $C^\infty$ -写像). 数理解析研究所講究録 1977, 286: 67-76

ISSUE DATE:

1977-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106115>

RIGHT:

$H_{2n+1}(BP_n, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$  なる全射が存在するという  
Thurston の定理について

埼玉大学 理 水谷忠良

§0 Thurston は [2] において,  $S^3$  に互に foliated  
cobordant でない余次元 1 葉層構造を構成し,  $H_1(BP_1, \mathbb{Z})$   
から実数の加群  $\mathbb{R}$  への全射が存在することを示した。その写  
像は葉層構造の Godbillon-Vey 形式を多様体上で積分するこ  
とで与えられる。余次元 2 以上の場合にも Godbillon-Vey 形  
式が存在するので, 同様の事実が成立するであろうことは十  
分予想されていたが, 3 次元の場合の単純な類推はうまくゆ  
かない。しかし事実はやはり予想通りであって, 同様の全  
射が存在する。ここで紹介するのは同じ Thurston による  
 $H_{2n+1}(BP_n, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$  なる全射が存在することの証明であ  
る。厳密な証明には細かい計算が必要であるが, ここではそ  
れを略して大筋を述べることにする。なお最近 J. Heitsch  
は他の exotic な特性類を用いて  $\mathbb{R}$  の何個かの直和への全  
射準同型が存在することを示して, Thurston の定理を拡張し  
ている。

本稿は、阪市大森田茂之代による Thurston の講義ノート  
をもとに筆者の独断的解釈を交えて書かれたものであること  
を断っておきたい。

§1. Godbillon-Vey form.  $(W, \mathcal{F})$  を滑らかな多様体  $W$  上の余次元  $n$  の滑らかな葉層構造とする。  $\mathcal{F}$  が 1-形式の系  $\omega_1 = \dots = \omega_n = 0$  で定義されているとき、大域的な  $n$ -形式  $\Omega$  で局所的には  $\Omega = k \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n$  ( $k$ : 正値関数) と書かれるものが存在する。(  $\mathcal{F}$  は横断的向きづけ可能であるとする。 1 の分解を用いればよい)。

$\omega_1 = \dots = \omega_n = 0$  が  $\mathcal{F}$  を定義していることから, Frobenius の積分可能条件が成り立つが, それは  $\Omega$  を用いて

$$d\Omega = \alpha \wedge \Omega$$

となる 1-形式  $\alpha$  が存在する, ということと同値であることが言える。

定義  $\alpha \wedge (d\alpha)^n = \gamma$  を Godbillon-Vey 形式と呼ぶ。

$\gamma$  が  $(2n+1)$ -次の閉形式であり, その DeRham コホモロジー類は  $\mathcal{F}$  だけにより,  $\Omega$  や  $\alpha$  のとり方によらず定まることが証明できる [ ]。

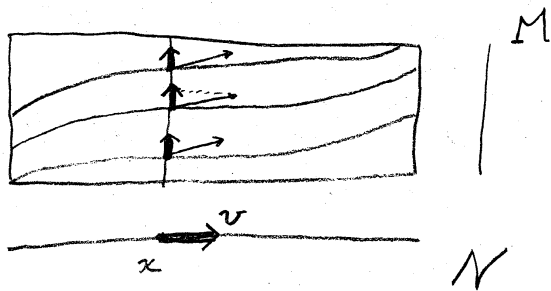
したがって, とくに  $W$  が  $(2n+1)$ -次元の閉多様体であれば  $\gamma$  を  $W$  上で積分すると, 実数  $\int_W \gamma = gv(W, \mathcal{F})$  が定まり, 0 と異なる値をとる可能性がある。  $gv(W, \mathcal{F})$  を Godbillon-Vey 特性数と呼ぶ。

## §2. Foliated $M$ -product に対する公式。

$W = N \times M$  とし,  $N$  上の自明なバンドルと考える。 $N$  の次元を  $(n+1)$  とし,  $M$  の次元を  $m$  とする。ファイバーに横断的な余次元  $m$  の葉層構造を foliated bundle というが, とくに  $M$  をファイバーとする自明なバンドルに対しては, 上のように foliated  $M$ -product と名前を呼ぶ。

$(N \times M, \mathcal{F})$  を foliated  $M$ -product とするとき,  $N$  の接空間  $T_x N$  から  $M$  上のベクトル場  $\mathcal{L}(M)$  への線形な写像  $\pi_x$  を次のように定義する。

$\pi: N \times M \rightarrow M$  を射影とする。 $T_x N$  の元  $v$  に対し  $\pi^{-1}(x)$  ( $\approx M$ ) の各点  $y$  を始点とする  $v$  の lift  $\tilde{v}_y$  が定まる。 $\tilde{v}_y$  はもちろん  $\mathcal{F}$  に接するベクトルで  $\pi$  で落すと  $v$  に写るものと定義するのである。 $W = N \times M$  は  $N$  域的に trivialization が指定されているので  $\tilde{v}_y$  を  $\pi^{-1}(x)$  に射影することが意味をもつ。 $\pi^{-1}(x)$  を  $M$  と同一視できるから, それは  $M$  の各点に接ベクトルを, すなわち  $M$  上のベクトル場を定める。これを  $\pi(v)$  と定義する。



$\beta$  が滑らかならば,  $m(v)$  が滑らかなことは容易に想像される。

次に,  $\mathcal{L}(M)$  の  $(n+1)$ -次元のコホモロジーの元  $\beta$  について述べる。  $M$  に Riemann 計量を定め, その体積要素を  $\omega$  とするとき  $\operatorname{div} X$ ,  $X \in \mathcal{L}(M)$  は リー微分  $L_X$  によって

$$L_X \omega = (\operatorname{div} X) \omega$$

となる関数のことであつた。  $\mathcal{L}(M)$  の Gel'fand-Fuchs コホモロジー類 (その代表元) を  $\operatorname{div}$  を使って

$$\begin{aligned} \beta(X_1, X_2, \dots, X_{n+1}) \\ = \int_M (\operatorname{div} X_1) d(\operatorname{div} X_2) \wedge \dots \wedge d(\operatorname{div} X_{n+1}) \end{aligned}$$

によって定める。  $d$  は外微分作用素で, 被積分形式は丁度  $n$  次形式である。 Stokes の定理を用いると,  $\beta$  が  $(n+1)$  次の交代形式であることがわかる。  $\beta$  が Gel'fand-Fuchs の意味でコサイクルになることもわかるが計算は少し面倒である。

上の  $\beta$  と写像  $m$  を用いると Godbillon-Vey 特性数は次のように書くことができる。

**補題**  $(N \times M, \mathcal{F})$  を foliated  $M$ -product とすると,  $gv(N \times M, \mathcal{F}) = \int \beta(m \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, m \frac{\partial}{\partial x^{n+1}}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n+1}$  である。ただし  $(x^1, \dots, x^{n+1})$  は  $N$  の局所座標である。

§3 定理と葉層構造の構成 証明する定理は次の定理である。

定理 任意の実数  $\gamma \in \mathbb{R}$  に対して,  $(2n+1)$ 次元の開多様体  $W^{2n+1}$  とその上の余次元  $n$  の葉層構造  $\mathcal{F}$  があって

$$g_V(W, \mathcal{F}) = \gamma$$

とすることができる。

Haefliger 構造の分類空間  $BP_n$  については次の系が言えることになる。

(系) 全射  $H_{2n+1}(BP_n, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$  が存在する。

実際に定理の証明をするときには  $W$  として  $\Sigma \times T^{n-1}$  上の  $S^n$  bundle,  $\mathcal{F}$  としては fibre に横断的な葉層構造をとる。 $(\Sigma$  は 2次元閉曲面である)。以下に  $\mathcal{F}$  の構成を述べる。方針は  $SL(2, \mathbb{R}) \times T^{n-1}$  から  $\text{Diff}(S^n)$  の表現(すなわち  $SL(2, \mathbb{R}) \times T^{n-1}$  の  $S^n$  への作用)をたくさん作って、 $SL(2, \mathbb{R})$  の Totally disconnected subgroup  $\Gamma$  を用いて、商空間  $(H \times \mathbb{R}^{n-1}) \times_{\Gamma \times \mathbb{Z}^{n-1}} S^n$  上に  $\mathcal{F}$  を作ることである。 $(H$  は上半平面である)。

$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \in SL(2, \mathbb{R})$  のリイ環,  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+1}), \mathcal{L}(S^n)$  をそれぞれ  $\mathbb{R}^{n+1}, S^n$  上のベクトル場の作るリイ環とする。

$SL(2, \mathbb{R})$  は  $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-1}$  の  $\mathbb{R}^2$  成分に線形写像として自然に作用するから、リイ環の準同型

$$\lambda_{n+1} : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+1})$$

が定まる。また、 $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  内の oriented lines と考えれば、同様に考えて

$$\rho_{n+1} : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(S^n)$$

も得られる。

$n=1$  のとき、 $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2) = C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  の元として  $e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  を (極座標の) 半径方向のベクトル場  $(r \frac{\partial}{\partial r})$  と考えると  $a \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  に対し  $\lambda_2(a) = k(\theta) e_2 + f_2(a)$  と書かれるが、 $\operatorname{div} \lambda_2(a) = 0$  より  $k(\theta) = -\frac{1}{2} \operatorname{div} f_2(a)$  がわかるので

$$\lambda_2(a) = -\frac{1}{2} \operatorname{div} f_2(a) e_2 + f_2(a) \text{ である}$$

$$n \geq 2 \text{ のとき } \lambda_{n+1}(a) = k(\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} + l(\theta) \begin{pmatrix} 0 & 1 & | & 0 \\ -1 & 0 & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{の形に書かれるが、} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} = e_{n+1}, \quad l(\theta) \begin{pmatrix} 0 & 1 & | & 0 \\ -1 & 0 & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} = \tilde{f}_2(a)$$

と置き  $e_{n+1}$  の  $S^n$  への射影を  $e'_{n+1}$  と置くと

$$\rho_{n+1}(a) = -\frac{1}{2} \operatorname{div} f_2(a) e'_{n+1} + \tilde{f}_2(a)$$

となる。

そこで  $S^n$  を結  $S^1 * S^{n-1} = S^1 \times I \times S^{n-1} / \sim$  と考え、Join coordinate  $(\theta, t, \varphi) \in S^1 \times I \times S^{n-1}$  とすると

$\rho_{n+1}(a)$  の式で

(i)  $\rho_2(a)$  は  $\theta$  方向のベクトル場, (ii)  $\text{div}(a)$  は  $\theta$  方向の関数 (iii)  $e'_{n+1}$  は  $t$  方向のベクトル場であることは明らかである。

さて,  $f_i: S^{n-2} \rightarrow \mathbb{R}$  を任意の  $C^\infty$  関数とし,  $Y$  を  $t$  方向のベクトル場で  $S^1 \times 0 \times S^{n-2}$  の  $S^n$  内の像 ( $\approx S^1$ ) の近傍で 0 となる  $C^\infty$  ベクトル場とする。準同型  $\sigma$

$$sl(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathcal{L}(S^n) \quad (\mathbb{R}^{n-1} \text{ は } T^{n-1} \text{ のリイ環})$$

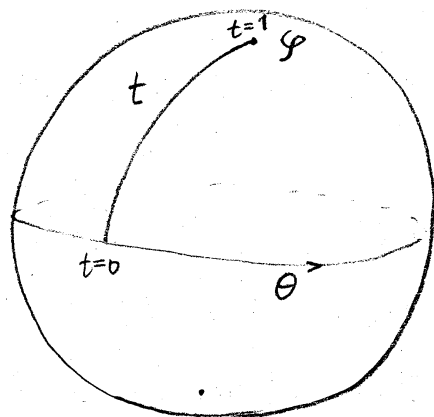
$$\sigma_{n+1}(a) = -\frac{1}{2} \text{div} \rho_2(a) Y + \tilde{\rho}_2(a), \quad a \in sl(2, \mathbb{R})$$

$$\sigma_{n+1}(t_i) = f_i(\varphi) Y, \quad (i=1, \dots, n-1)$$

$\{t_i\}$  は  $\mathbb{R}^{n-1}$  の基底,

により定義すると, 上の (IX) (X) (Y) に注意すると  $\sigma_{n+1}$  は リイ環の準同型になる。  $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  のとき  $\sigma_{n+1}(a) = \tilde{\rho}_2(a)$

で,  $a$  が生成する  $\mathbb{R}^1$  作用は周期的となり,  $\sigma_{n+1}$  は  $SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-1}$  の  $S^n$  への作用を定めることがわかる。





$H = \{ z = x + iy \mid y > 0 \}$  を Poincaré 上半平面とし、 $H$  を写像  $x + iy \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{y}} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \sqrt{y} \end{pmatrix}$  によって  $SL(2, \mathbb{R})$  に埋めこんでおく。

$H \times \mathbb{R}^{n-1}$  の元  $(z, u)$  は上の埋めこみと、 $SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-1}$  の  $S^n$  への作用によって  $\text{Diff}(S^n)$  の元に対応する。それを  $\bar{\varphi}(z, u)$  と表わしておこう。

$H \times \mathbb{R}^{n-1} \times S^n \longrightarrow H \times \mathbb{R}^{n-1}$  なる自明な bundle に cross-section の族によって葉を次のように定義する。

$H \times \mathbb{R}^{n-1}$  の点  $(z, u)$  上で点  $\omega \in S^n$  を通る葉  $L_\omega$  を

$$L_\omega = \{ (z, u, \bar{\varphi}(z, u)(\omega)) \mid (z, u) \in H \times \mathbb{R}^{n-1} \}$$

によって定める。

$SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-1}$  は  $\sigma_{n+1}$  によって  $S^n$  に作用し、また一方では  $H \times \mathbb{R}^{n-1}$  にも作用するが、その作用は上の葉層構造の葉を葉に移す。従って部分群  $\Gamma \times \mathbb{Z}^{n-1}$  の作用で  $H \times \mathbb{R}^{n-1} \times S^n$  を割ってコンパクトな多様体  $H \times \mathbb{R}^{n-1} \times S^n_{\Gamma \times \mathbb{Z}^{n-1}}$  上の葉層構造を得ることができる。 $(\Gamma$  は  $SL(2, \mathbb{R})$  の totally disconnected subgroup で  $H/\Gamma = \Sigma$  (コンパクトな曲面となるものとする)。

4頁の補題に従って、Godbillon-Vey 特性数を計算する。(実は補題は構造群が  $O(n)$  に reduce する foliated bundle にも適用される。このときは写像  $\mathcal{M}$  が、 $\mathcal{L}(M)$  への写像と

しては well-defined ではないが、 $\beta$  の形から、積分は定まり、Godbillon-Vey 特性数に一致する。

Foliated product  $H \times R^{n-1} \times S^1$  に対して

$(x, y, u_1, \dots, u_{n-1}) \in H \times R^{n-1}$  を base space の局所座標とし  $m(\frac{\partial}{\partial x}), m(\frac{\partial}{\partial y}), m(\frac{\partial}{\partial u_i})$  ( $i=1, \dots, n-1$ ) を計算すると、葉層構造の構成からそれぞれ  $(0, i, 0, \dots, 0)$  上では  $\sigma_{n+1}(a_2), \sigma_{n+1}(a_3), (a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix})$  および  $\sigma_{n+1}(t_i)$  に等しくなる。一般の  $(z, u) = (x, y, u_1, \dots, u_{n-1})$  上ではこれらは  $\bar{\varphi}(z, u)$  で写したものに成る。

$(0, i, 0, \dots, 0)$  上で  $\beta(m(\frac{\partial}{\partial x}), m(\frac{\partial}{\partial y}), m(\frac{\partial}{\partial u_1}), \dots, m(\frac{\partial}{\partial u_{n-1}}))$  は  $\beta(\sigma_{n+1}(a_2), \sigma_{n+1}(a_3), \sigma_{n+1}(t_1), \dots, \sigma_{n+1}(t_{n-1}))$  で

$\text{div } Y = 0$  (near  $S^1$ )  $\text{div } Y = 2$  ( $S^{n-2}$  上) など、注意すると、これは3つの積分の積

$$\left( \int_t (1 - \frac{1}{2} \text{div } Y)^2 (\text{div } Y)^{n-2} d(\text{div } Y) \right) \cdot \left( \int_0 \text{div } \sigma(a_2) d(\text{div } a_2) \right) \cdot \left( \int_{\mathcal{F}} \sum_i f_i df_1 \wedge \dots \wedge df_{i-1} \wedge df_{i+1} \wedge \dots \wedge df_{n-1} \right)$$

に書けることかわかる。 $\bar{\varphi}(z, u)$  での上の積分の変化を考えると、結局  $g_V$  は

$$g_V = \int_N (\text{上の積分の値}) dN \quad (dN \text{ は } N \text{ の volume form})$$

形に書けることが確かめられて、 $f_i$  を動かすことによって、

$g_U$  が任意の実数値を取ることが示される。

それを確かめるには、上の三つの積分の第1番と第2番目が実際に0でないこと、および第3の積分が写像  $S^{n-2} \rightarrow R^{n-1}$   $\varphi \mapsto (f_1(\varphi), \dots, f_{n-1}(\varphi))$  による像の囲む領域の体積に等しいことに注意すればよい。

( $H \times R^{n-1}$  は  $H \times R^{n-1} / \Gamma \times \mathbb{Z}^{n-1}$  の被覆であるから局所的な記述はすべて  $H \times R^{n-1} / \Gamma \times \mathbb{Z}^{n-1}$  のそれと考えてよい。)

### 参考文献

- [1] Godbillon-Vey, Un invariant des feuilletages de codimension 1. C. R. Acad. Sci. Paris (273) (1971).
- [2] W. Thurston, Noncobordant foliation of  $S^3$ , Bull of A. M. S., 78 (1972) 511-514.